

決定係数 R^2 の違い: Excel, OpenOffice, LibreOffice および統計解析ソフト R を用いて

井口豊*

*生物科学研究所, 長野県岡谷市

Email: bio.iguchi@gmail.com

This is a preprint and has not been peer reviewed. Data may be preliminary.

DOI: <https://doi.org/10.22541/au.176650719.94164489/v1>

Abstract

This article discusses different definitions of the coefficient of determination R^2 adopted by various statistical software programs such as Excel, OpenOffice, LibreOffice, and R.

決定係数 R^2 の定義は複数あり、統計ソフトによって採用される定義が異なると、同じデータであっても結果が異なる。これには、計算プログラムのバグとして誤解されるケースもあり、注意が必要だ。

決定係数 R^2 の違い: Excel, OpenOffice, LibreOffice および統計解析ソフト R を用いて

井口豊*

*生物科学研究所, 長野県岡谷市

Email: bio.iguchi@gmail.com

1. はじめに

決定係数 R^2 の定義は複数あり, 統計ソフトによって採用されている定義が異なり, 同じデータであっても結果が異なるという問題を論じる。これは, 計算プログラムのバグの問題ではない。なお, 本稿のもとになったウェブサイトでの解説（注 1, 注釈は末尾に一括）は, 鎌田 (2015), 稲田ほか (2022) によって引用されている。

2. 原点通過（定数項 y 切片ゼロ）の直線回帰における決定係数とは

本稿で扱うのは線形回帰の問題であり, ロジスティック回帰を含む非線形回帰に対しては, 類似の指標として, 擬似決定係数 (pseudo R^2) が使われることがあるが, 本稿では扱わない。

回帰直線を Excel の原点通過 (y 切片 0) グラフで近似すると, 負の決定係数 R^2 が表示されることがある。決定係数は寄与率とも呼ばれ, 目的変数（従属変数） y の全変動に対する回帰変動の割合, すなわち, 回帰式の適合度とも解釈される。それゆえ, マイナスになることは, 一見おかしな結果である。しかしながら, 実際には Kvalseth (1985) によれば, 少なくとも 8 種類の異なる決定係数 R^2 があり, しかもその違いもあまり言及されてこなかった。この定義の中には, 場合によっては決定係数が負になるものもある。

ここでは, 下記の表 1 のデータを取り上げて, 原点通過 (y 切片 0) 回帰直線の決定係数に関して, 以下三つのソフトの計算結果を比較検討してみた。

- Excel 2003 のグラフ
- OpenOffice (ver. 3.3.0) calc
- 統計解析ソフト R (ver. 2.15.3)

いずれも 2025 年現在ではバージョンが新しくなっている。当然ながら、ソフトのバージョンが異なると、使われる決定係数の定義も異なり、これから示す結果通りにはならない場合もある。しかし、上記のバージョン当時の計算結果を示すのも、決定係数の複数定義を考える上で意義があると思われる。

表 1.

x	y
1	1
2	2
3	2
4	4
5	3
6	3
7	2
8	2
9	3
10	4

3. Excel の決定係数

次の表 2 のように、 x と y のデータを A2 - A11 と B2 - B11 のセルに入力したとする。

表 2.

	A	B
1	x	y
2	1	1
3	2	2
4	3	2
5	4	4
6	5	3
7	6	3
8	7	2
9	8	2
10	9	3
11	10	4

まず、Excel グラフを用いて決定係数を表すと、次の図 1 のようになる。

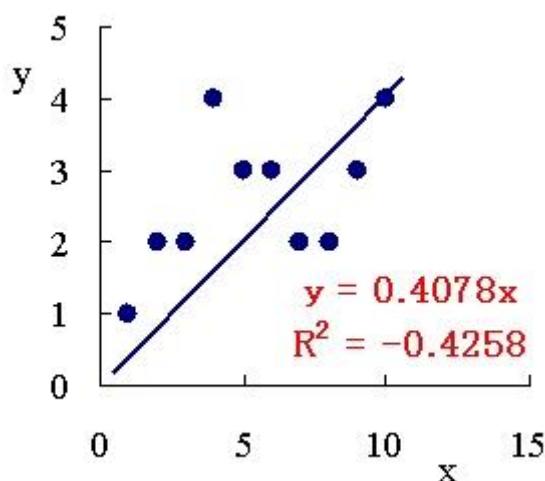


図 1. y 切片無し（定数項ゼロ）の直線回帰.

一方、LINEST 関数を用いても、決定係数を求めることができる。ただし、LINEST 関数は、配列型の結果を返すので、その中から決定係数のみ取り出すならば、INDEX 関数を使って、3 行 1 列目の要素として、それを取り出す。

```
=INDEX(LINEST(B2:B11, A2:A11, 0, 1), 3, 1)
0.8424
```

関数の使い方が面倒なら、LINEST 関数だけ使い、配列要素全てを見ると良い。

4. OpenOffice Calc の決定係数

今回使用した OpenOffice Calc の ver. 3.3.0 では、 Excel と異なり、 グラフで原点通過の回帰直線を求ることはできない。したがって、 LINEST 関数のみの利用となる。

```
=INDEX(LINEST(B2:B11; A2:A11; 0; 1); 3; 1)  
0.2828
```

ここで LINEST 関数の利用にあたって注意すべき点は、 Excel では引数をカンマ (,) で区切るのに対し、 OpenOffice Calc ではセミコロン (;) で区切るということである。

5. 統計ソフト R の決定係数

統計ソフト R での、 データ入力と、 原点通過の直線回帰における決定係数の算出プログラムは以下の通りである。ここでは、 lm 関数を用いて、 通常最小二乗法 (Ordinary Least Square, OLS) によって、 回帰直線を求めた。

```
x<- c(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)  
y<- c(1, 2, 2, 4, 3, 3, 2, 2, 3, 4)  
reg<- lm(formula = y ~ x-1) summary(reg)$r.squared  
0.8424
```

6. 決定係数の比較

以上の計算結果から、 決定係数とピアソン積率相関係数 (Pearson product-moment correlation coefficient) の 2 乗をまとめたのが、 次の表 3 である。

表 3.

	決定係数	相関係数 2 乗
Excel グラフ	-0.4258	0.2828
Excel Linest	+0.8424	0.2828
Calc Linest	+0.2828	0.2828
統計ソフト R	+0.8424	0.2828

この表から、以下のことが容易に分かる。

- Excel の決定係数はマイナス
- Excel の Linest 関数と統計ソフト R では、同じ決定係数
- Calc の決定係数は、相関係数の 2 乗

それでは、Excel のグラフと Linest 関数、および統計ソフト R の決定係数は、どのように算出されるのだろうか？それを明らかにするためには、まず回帰分散分析として、 y 観測値を、以下のような 3 種類の変動として捉えてみることが必要になる。

- 回帰変動（回帰平方和 RSS, Regression Sum of Squares）
- 残差変動（残差平方和 SSR, Sum of Squared Residuals）
- 全変動（全平方和 TSS, Total Sum of Squares）

全変動は回帰変動と残差変動の和になる。

$$TSS = RSS + SSR$$

この中で、特に SSR と TSS に焦点を当てて、以下に解説する。

7. 残差平方和 SSR の算出

回帰直線の式は、どのソフトを使っても同じになるので、SSR も同じになる。すなわち、 y の観測値 y_i と回帰による計算値（予測値） \hat{y} の差の 2 乗和（平方和）である。

$$SSR = \sum (y_i - \hat{y})^2$$

7.1 Excel による SSR

Excel では、LINEST 関数が返す配列の中で、SSR は 5 行 2 列目にあるので、決定係数のとき同様、INDEX 関数を使って算出する。

```
=INDEX(LINEST(B2:B11,A2:A11,0,1),5,2)  
11.9766
```

7.2 統計ソフト R による SSR

スクリプトと結果は以下のとおり。

```
sum(reg$residuals^2)
11.9766
```

8. 全平方和 TSS の算出

問題となるのは、この算出法である。

8.1 Excel グラフにおける TSS

$$TSS = \sum (y_i - \bar{y})^2$$

これは、Excel グラフ（図 1）で、 TSS が y の観測値 y_i とその平均 \bar{y} の差の 2 乗和であることを意味する。この値を求めるには、Excel の DEVSQ 関数を使えば良い。

```
= DEVSQ(B2:B11)
8.4
```

8.2 Excel の LINEST 関数における TSS

$$TSS = \sum y_i^2$$

これは LINEST 関数で、 TSS が y 観測値の 2 乗和であることを意味する。すなわち Excel グラフでは、 TSS の変動基準を y 平均値としているのに対して、LINEST 関数では、それを $y = 0$ としている。この値を求めるには、Excel の SUMSQ 関数を使えば良い。

```
= SUMSQ(C72:C81)
76
```

これは LINEST 関数の配列要素を使って求めることもできる。すなわち、LINEST 関数 5 行 1 列に回帰平方和（RSS），5 行 2 列に残差平方和（SSR）があるので、 TSS は両者の和として求められる。

```
TSS = RSS + SSR
= INDEX(LINEST(B2:B11,A2:A11,0,1),5,1)
+INDEX(LINEST(B2:B11,A2:A11,0,1),5,2)
```

8.3 統計ソフト R における TSS

$$TSS = \sum y_i^2$$

統計ソフト R も、 LINEST 関数と同じく、 TSS が y 観測値の 2 乗和であることを意味する。この TSS を具体的に求めるには、最小二乗法による直線回帰の結果に対し、分散分析（ANOVA）を行うと、平方和を表す Sum の 1 列目に回帰平方和 RSS、2 列目に残差平方和 SSR があるので、 TSS は両者の和として求められる。

```
anova(reg)$Sum[1]+anova(reg)$Sum[2]
76
```

9. 決定係数 R^2 (R-Squared) の算出

前述のとおり、実は、Excel グラフも、Excel の LINEST 関数も、そして統計ソフト R も、基本的には、決定係数に同じ式を使っている。すなわち、

$$R^2 = 1 - \frac{SSR}{TSS}$$

このとき全変動 TSS の定義が異なるために、異なる R^2 が算出されるのである。

以下に、Excel グラフ、LINEST 関数、統計ソフト R における決定係数の算出法を示すとともに、それぞれが、Kvalseth (1985) が紹介した 8 種類の異なる決定係数の定義の中で、 R^2_1 と R^2_7 に当たることも示す。

Excel graph:

$$\begin{aligned} R^2_1 &= 1 - \frac{\sum(y_i - \hat{y})^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2} \\ &= -0.4258 \end{aligned}$$

Excel LINEST, Software R:

$$\begin{aligned} R^2_7 &= 1 - \frac{\sum(y_i - \hat{y})^2}{\sum y_i^2} \\ &= 0.8424 \end{aligned}$$

表 3 に示した OpenOffice calc の決定係数、すなわち相関係数の 2 乗という定義は、Kvalseth (1985) の R^2_5 に相当する。

OpenOffice calc は、Excel との互換性を追及しているはずだが、決定係数の算出に関して、なぜか全く異なる定義を採用している。

一方、LibreOffice で LINEST 関数から算出される決定係数は、Excel のそれと同じく R^2_7 である。

医療統計解析ソフトウェア GraphPad Prism では、原点通過 (y 切片ゼロ、定数項なし) の回帰直線に対して、デフォルトでは決定係数を表示しない。Motulsky (2007) による Prism の解説書 p.41, Why Prism doesn't report r^2 in constrained linear regressionにおいて、 R^2_1 と R^2_7 の定義を挙げ、どちらも問題点があることを指摘している。この点は確かにその通りであり、後述するような問題点が両者に現れる。

それでも Prism で決定係数を求めたい場合は、非線形回帰のオプションで求めるようになっている。その場合、Prism も Excel グラフと同じく R^2_1 を使うので、負の決定係数が出てくる。

なお、ここでは詳しく解説しないが、古生物学や生態学の分野では有名なフリーの表計算・統計分析ソフト PAST では、原点通過直線の決定係数で、相関の 2 乗となる定義 R^2_5 を採用している。

ソフトごとの決定係数の定義をきちんと知り、自分でその定義式を使って算出してみないと、単純にバグ（プログラムエラー）と思ってしまうので注意が必要である。

10. Excel グラフの決定係数 R^2_1 (R-Squared 1) は不適切か？

前述のとおり、歴史的には少なくとも 8 種類の異なる決定係数が用いられてきたのである (Kvalseth, 1985)。だから、原点通過（定数項無し）の直線回帰モデルに対して、 R^2_1 の定義は間違いだ、と単純には言えない。

例えば、私がウェブサイト「決定係数 R^2 の誤解」（注 2）で扱ったデータに回帰直線を当てはめてみる。

表 4.

x	y
10	30
20	10
30	30
40	50
50	30
60	60
70	90
80	110
90	90
100	110

実は、これは回帰直線が原点を通過するように意図的に作られたデータなのである。

すなわち、以下のように、定数項有りと、定数項無しで、回帰式が完全に一致する。

回帰モデル 1（定数項あり）：

$$y = 1.109x + 0$$

回帰モデル 2（定数項なし）：

$$y = 1.109x$$

ここで Excel グラフを利用すると、どちらにも R^2_1 を使うので、両者の決定係数もまた一致する。

回帰モデル 1:

$$R^2 = 0.8394$$

回帰モデル 2:

$$R^2 = 0.8394$$

ところが統計ソフト R では、原点通過するかどうか、つまり、定数項の有無で異なる定義の決定係数を使うので、両者の決定係数は異なってしまうのである。

回帰モデル 1:

$$R^2 = 0.8394$$

回帰モデル 2:

$$R^2 = 0.9606$$

つまり、統計ソフト R では、全く同じ回帰直線が得られたとしても、原点通過するかどうか、つまり、定数項の有無で、それぞれ R^2_1 と R^2_7 を使い分けるので、決定係数が異なってしまうのである。

もちろん、推定したパラメータ数は、定数項有りでは a と b の二つ、定数項無しでは a の一つと異なるので、自由度を補正した決定係数ならば、それが両者で異なるのが当然である。しかし、ここで問題にしているのは、その補正をしない、通常の決定係数なのである。

以上の計算例を見れば、R の決定係数が適切で、Excel グラフの決定係数が不適切と一概には言えないことがわかる。もちろん、バグではない。

10. 本質的な問題は何か？

ここまで問題は、原点通過の回帰直線を考える時、決定係数が負になるような定義 R^2_1 は不適切なのか、という点であった。しかしながら、この問題が取り上げられるとき、多くの場合、そもそも原点通過モデルを設定するのが正しいのか、という議論が、すっぽり抜け落ちているのである。これこそ、むしろ本質的に重要な問題なのである。

この点をまさに突いているのが、Motulsky and Christopoulos (2003) による p. 35 の指摘である。

R2 will be negative when the best-fit curve fits the data worse than a horizontal line at the mean Y value. This could happen if you pick an inappropriate model.

逆に言えば、決定係数が負になることも承知の上で、定義 R^2_1 が使われるこことを示している。

最初に示したデータ（表 1）を実際に検討してみよう。それには、定数項有りのモデルを考えて、定数項がゼロである、という帰無仮説を検定すれば良い。

厳密に言えば、係数 b は標本の傾きであり、検定は推定された母集団の定数項に対して行われるのであるが、ここでは、そういう表現上の厳密さは問題にしない。

統計ソフト R を使えば、以下のようなプログラムになる。

```
x <- c(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)
y <- c(1, 2, 2, 4, 3, 3, 2, 2, 3, 4)
reg <- lm(formula = y ~ x)
summary(reg)$coefficients
```

その結果を次の表 5 に示す。

表 5.

	Estimate	Pr(> t)
Intercept	1.666667	0.02279009
x	0.169697	0.11360499

定数項は有意に 0 と異なる。すなわち、表 1 データの場合、元々、原点を通過しない、定数項 0 とは言えない回帰直線を、強制的に原点通過させて論じているのである。まさに、前述の Motulsky and Christopoulos (2003) の指摘どおりの結果なのである。

決定係数が負になるのは間違いだ、と言う以前に、それがどのような条件下で起こるのか、という本質的に重要な問題が、ここに存在する。

さらに、次の表 6 のデータを考えてみよう。

表 6.

x	y
110	180
120	170
130	180
140	170
150	160
160	160
170	150
180	145
190	140
200	145

Excel グラフを用いて決定係数を表すと、次の図 2 のようになる。

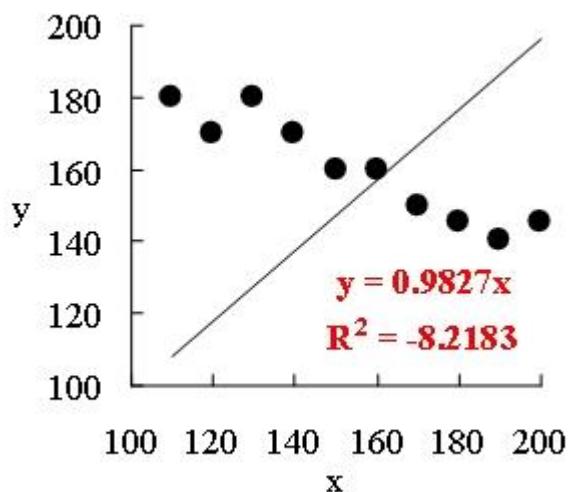


図 2. 表 6 データに対する y 切片無し（定数項 0）の直線回帰.

Excel グラフの決定係数は、負になるどころか、絶対値 1 を大きく上回るのである。

一方、統計ソフト R を用いて、このデータに対する y 切片無しの回帰直線の決定係数を求めてみる。

```
x <- c(110, 120, 130, 140, 150, 160, 170, 180, 190, 200)
y <- c(180, 170, 180, 170, 160, 160, 150, 145, 140, 145)
reg <- lm(formula = y ~ x-1)
summary(reg)$r.squared
```

0.9303

なんと、統計ソフト R の決定係数では、この y 切片無しの回帰直線は非常に良く適合している、という結果が出るのである。

こんなデータに y 切片無しのモデルは考えない、と言うかもしれない。しかしそれを言うならば、前述のように、 y 切片が 0 とは有意に異なる表 1 データに、 y 切片 0 のモデルを適用したことと、五十歩百歩の議論である。

もう一度、Motulsky and Christopoulos (2003) の指摘を思い出してみよう。Excel グラフの決定係数の定義、すなわち R^2_1 が、負になるのは不適切なモデルを選んだときだ、と言うのである。その意味からすれば、表 6 のデータに対して、 R^2_1 が負 (-8) になったのは、モデル自体が非常に不適切だと言える。つまり、負の決定係数は「当てはまりの悪さの指標」、と言えるのである。

いずれにせよ、決定係数に複数の定義があることは事実であり、それぞれ一長一短の性質を持つと言える。その考察なしに、負の決定係数が出る、というだけで、そのプログラムを正しくないとか、バグであるとか結論するのは、拙速である。

11. 決定係数によるモデル選択は妥当か？

表 1 のデータと表 6 のデータに対して、定数項ありの回帰直線モデルと定数項なし (y 切片 0, 原点通過) の回帰直線モデルの適合度を、以下のようにして調べてみた。

前述のように、両者では推定されたパラメータの数が異なるので、決定係数 R^2 ではなく、補正済み（自由度調整済み）決定係数 R^{*2} (adjusted R-squared) と赤池情報量規準 AIC (Akaike Information Criterion) を用いて、適合度を評価した。

統計ソフト R で AIC を算出する時は、例えば、 x, y データに対して、以下のようにする。

```
reg <- lm(formula = y ~ x)
AIC(reg)
```

表 1 のデータに対して、定数項有りの回帰直線、および、定数項無し（ y 切片 0、原点通過）の回帰直線を当てはめたグラフが次の図 3 であり、その分析結果が、その下の表 7 である。

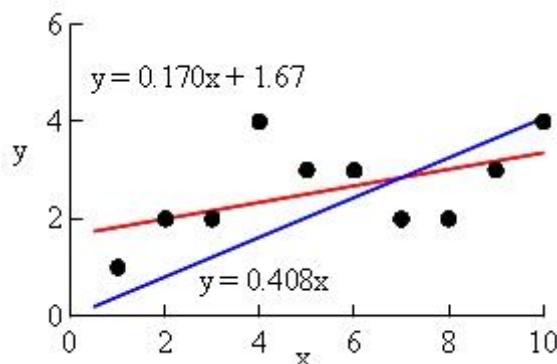


図 3. 表 1 データに対する定数項有りと無しの回帰直線.

表 7. 表 1 データに対する定数項有りと無しの回帰直線の自由度調整済み決定係数

	$y = 0.408x$	$y = 0.170x + 1.67$
Excel グラフの R^2	-0.604	+0.193
統計ソフト R の R^2	+0.825	+0.193
AIC	34	29

ここで注意すべきは以下の点である。

- R^2 が大きいほど適合度が良いモデル
- AIC が小さいほど適合度が良いモデル

すると、AIC によれば、定数項ありのモデルのほうが良い、と言える。これは、Excel グラフの R^{*2} でも同じ結論である。一方で、統計ソフト R の R^{*2} によれば、定数項なしのモデルのほうが良い、という結論になる。

つまり、定数項の有無のモデル間で適合度を比較すると、奇妙な結果を出すのは、むしろ統計ソフト R のほうである。SPSS も統計ソフト R と同じ定義の決定係数を利用なので、Excel グラフよりも、統計ソフト R や SPSS のほうが奇妙な結果になると言える。

これは、表 6 のデータについて、次のグラフ（図 4）と分析結果（表 8）を見ると、さらに明確になる。

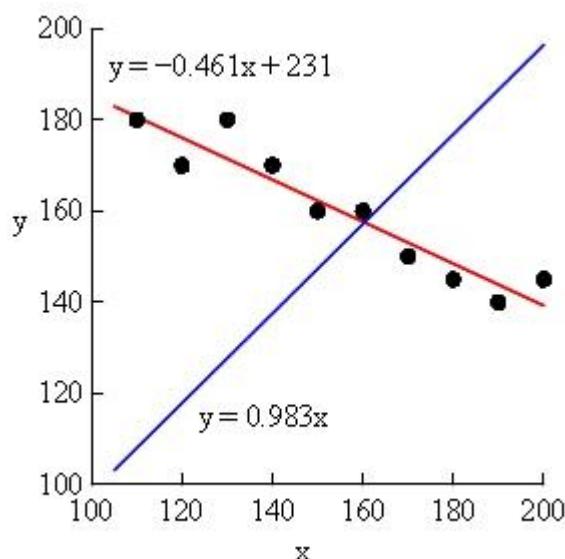


図 4. 表 6 データに対する定数項有りと無しの回帰直線の当てはめ.

表 8. 表 6 データに対する定数項有りと無しの回帰直線の自由度
調整済み決定係数

	$y = 0.983 x$	$y = -0.461 x + 231$
Excel グラフの R^{*2}	-9.37	+0.885
統計ソフト R の R^{*2}	+0.923	+0.885
AIC	107	64

図 4 を見れば、どちらの回帰直線の適合度が良いか、一目瞭然だろう。表 8 から、確かに、AIC と Excel グラフの R^2 では、定数項ありモデルの適合度が良い、と判断される。ところが、統計ソフト R では、定数項なしモデルのほうが、適合度が高いのである。

この例でもまた、Excel グラフよりも、むしろ統計ソフト R や SPSS のほうが奇妙な結果を出すと言える。

もちろん、あらゆるデータで、このような傾向が認められるとは限らない。しかし少なくとも、Excel グラフでは決定係数がマイナスになるから正しくない、という意見は短絡的と言えるだろう。ましてや、それが単純なバグとは言えない。

では、Excel グラフの決定係数が正である場合はどうなのだろうか？以下の仮想データで調べてみよう。

表 9. 仮想データ

x	y
1875	9.6036
1240	6.1353
1220	5.2843
855	4.7610
825	4.2004

定数項ありの回帰直線と、定数項なし (y 切片 0, 原点通過) の回帰直線を当てはめたグラフが、次の図 5 である。

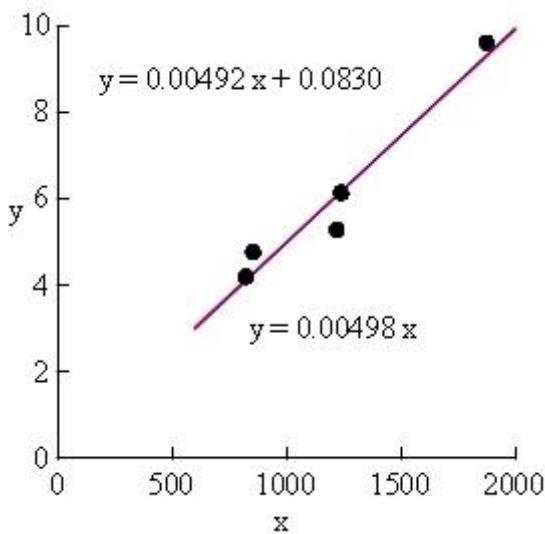


図 5. 表 9 データに対する定数項有りと無しの回帰直線.

このデータでは、定数項ありの直線と定数なしの直線が、ほとんど一致し、グラフでは見分けがつかない。

次の表 10 で、通常の決定係数 R^2 と残差平方和 SSR を見てみよう。

表 10. 表 9 データに対する定数項有りと無しの回帰直線の決定係数

	$y = 0.00498x$	$y = 0.00492x + 0.0830$
Excel グラフの R^2	+0.9475	+0.9477
統計ソフト R の R^2	+0.995	+0.948
残差平方和 SSR	0.960	0.957

自由度を考慮せず、単純に考えると、パラメータを増やせば適合度が良くなり、したがって、残差平方和 SSR は減少し、決定係数 R^2 は大きくなる。

表 10 では、定数項有りの直線は、定数項無しの直線に比べて、 SSR は、わずかではあるが確かに減少している。それに対応し、Excel グラフの R^2 、すなわち R^2_1 も、わずかながら増加している。

ところが、統計ソフト R の R^2 、すなわち R^2_7 は減少してしまっているのである。ここでも、むしろ Excel グラフの決定係数のほうが、自然な変化を示しているのである。

このような R^2 の奇妙な変化は、その全変動 TSS の定義が、 $y=0$ を基準としていることに由来する。つまり、この定義は、回帰式が原点を通る、ということだけに注目し、データがどのように分布しているかは十分考慮していないのである。

繰り返しになるが、決定係数には様々な定義、すなわち、Kvalseth (1985)によれば 8 種類の定義がある。そのうち、原点通過（定数項なし、 y 切片ゼロ）の回帰でどれを採用するかは、一意的に決められていない。その点をまず認識すべきである。

引き続き同じデータで、補正済み（自由度調整済み）決定係数 R^{*2} と AIC を調べてみる。前述の通り、パラメータを増やせば、残差 SSR が減少し、見かけ上は適合度が高くなる。そのパラメータ增加分を補償（補正）しようというのが、 R^{*2} である。

表 11. 表 9 データに対する定数項有りと無しの回帰直線の自由度調整済み決定係数

	$y = 0.00498 x$	$y = 0.00492 x + 0.0830$
Excel グラフの R^{*2}	+0.934	+0.930
統計ソフト R の R^{*2}	+0.994	+0.930
AIC	9.9	11.9

Excel グラフ、統計ソフト R、AIC、いずれもが自由度を考慮すれば、原点通過（定数項なし、 y 切片ゼロ）の回帰直線の適合度が良い、という結果になる。

このデータの回帰分散分析の結果も見てみる。

表 12.

	Estimate	Pr(> t)
Intercept	0.0830201	0.92760
x	0.0049160	0.00516

定数項は有意には 0 と異なることがわかり、定数項なしの回帰式の適合度が高いという表 11 の結果を支持する。

もちろん、定数項の有無で、異なる定義の決定係数を用いる場合は、それらを比較できない、と考えることも可能である。しかしそれなら、比較不可能な決定係数の意義は何だろうか、と考えてしまう。仮に、決定係数を単独で使うとしても、図 2 のような回帰直線の R^2 を 0.9303 と高く出す統計ソフト R のような定義 R^2_7 が妥当なのかは疑問である。少なくとも、 R^2_7 は正しく、 R^2_1 は正しくない、と単純には割り切れないと言える。

注

1. 決定係数 R^2 の違い: Excel, OpenOffice, LibreOffice および統計解析ソフト R を用いて <https://biolab.sakura.ne.jp/r-squared.html> 12月22日確認.
2. 決定係数 R^2 の誤解：必ずしも相関の 2 乗という意味でなく、負にもなるし、非線形回帰には使えない <https://biolab.sakura.ne.jp/r2.html> 2025年12月22日確認.

参考文献

稻田裕・米山一幸・加藤雅裕 (2022) 道路ネットワーク評価と道路診断を連動したインフラマネジメント手法の提案. インフラメンテナンス実践研究論文集 1(1): 471–480.

鎌田敏之 (2015) 「データの活用」を育む表計算ソフトウェア活用学習とその実践. 愛知教育大学技術教育研究 1: 23–28.

Kvalseth T. O. (1985) Cautionary Note about R2. The American Statistician 39: 279–285.

Motulsky H. J. and Christopoulos A. (2003) Fitting models to biological data using linear and nonlinear regression. GraphPad Software Inc., San Diego CA.

Motulsky H. J. (2007) Prism 5 Statistics Guide, GraphPad Software Inc., San Diego CA, www.graphpad.com