生物科学研究所 研究報告 2024 年 11 月 4 日

カイ二乗検定（独立性検定）から残差分析へ：全体から項目別への検定

井口豊*
*生物科学研究所，長野県岡谷市

Report of Laboratory of Biology, 4 November 2024

Chi-square test and residual analysis

Yutaka Iguchi*
*Laboratory of Biology, Okaya, Japan

DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.14034800

1. はじめに

カイ二乗検定が，独立性の検定，つまり，独立な標本間の比率の差の検定，として用いられることは，よく知られている。しかし，カイ二乗検定は全体としての比率の違いは検出するが，個別の項目のどこに差があるかを示さない。その目的で通常行われるのが残差分析であるが，初等的な教科書には載っていないこともあって，あまり知られていない。
ここでは，カイ二乗検定とは何かを簡単に説明し，その後，残差分析を解説する。さらに，多重検定としての Benjamini & Hochberg 法も紹介し，残差分析を行なっている日本語文献も紹介した。

本稿の元になったウエブサイト（注 1，注釈は末尾に一括）での解説は，山下良奈（2015），宮地（2020），岩田（2021）などで引用されている。

2. カイ二乗検定とは何か

カイ二乗検定は，以下の式で示す χ^2 値が近似的にカイ二乗分布に従う，と考えることを利用している。

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}$$

ここで，O は観測値，E は期待値である。

分子は，観測値と期待値のズレ（残差）の二乗である。その残差の二乗の相対的大きさを見積もるために，分母の期待値で割っている。例えば，1 と 2 の差でも，999 と 1000 の差でも，同じく 1 だが，その重みが両者で違うのが直感的に分かるだろう。その重みを考慮して，残差の期待値に対する相対的大きさを検定するのが，カイ二乗検定である。
それゆえ，比率の差の検定とも言われる。この「残差の期待値に対する相対的大きさ」がカイ二乗検定の要諦である。

ここでは例として，3 群 A, B, C で得られた観察値 I と II という二値データの独立性検定を，カイ二乗検定でおこなう。二値データとは，Yes，No とか，男女とか，有無とかに分類される二者択一のデータである。それが次の表 1 のような 2 × 3 分割表にまとめられているとする。

表 1. 群 A, B, C における観察値 I, II の度数

	A	B	C	合計
観察値 I	7	4	23	34
観察値 II	10	8	8	26
合計	17	12	31	60

群は標本（サンプル，sample）とも呼ばれ，この場合，標本数（サンプル数）$k = 3$ のように表す。一方，A の観察値の合計数 17 は，標本サイズ，または，サンプルサイズ，あるいは，標本の大きさと呼ばれ，標本サイズ $n = 17$ のように表す。これらの用語を混同しやすいので注意しよう。

表 1 は，通常，分割表（クロス表，cross table）と呼ばれるが，英語では，Contingency table （偶然表）と呼ばれることもある。各セルの期待値 E は，以下の式で計算される。

$$E = \frac{\text{周辺和の積}}{\text{総数}}$$

例えば AI セルの期待値は以下のようになる。

$$\begin{aligned} E(\mathrm{AI}) &= \frac{34 \times 17}{60} \\ &\approx 9.6 \end{aligned}$$

ここで，≈ は，ほぼ等しい，約，を意味する記号であり，日本では，≒ を使用することに注意する。

では，なぜこれが期待値なのだろうか？表 1 を再度見て欲しい。以下のことが分かる。

I の確率: $P(\mathrm{I}) = 34/60$

A の確率: $P(\mathrm{A}) = 17/60$

I が起きる確率と A が起きる確率が独立なら，I かつ A が起きる確率は次のようになる。

$$\begin{aligned} P(\mathrm{I} \cap \mathrm{A}) &= P(\mathrm{I})P(\mathrm{A}) \\ &= \frac{34}{60} \times \frac{17}{60} \end{aligned}$$

したがって，I かつ A が起きる期待値 E は，次のように計算される。

$$E(\mathrm{I} \cap \mathrm{A}) = 60 \times \frac{34}{60} \times \frac{17}{60}$$
$$= \frac{34 \times 17}{60}$$

これが，カイ二乗検定検定が独立性の検定と言われるゆえんである。このようにして，各セルの期待値を求めると，次の表 2 になる。

表 2. 群 A, B, C における I, II の期待値

	A	B	C	合計
期待値 I	9.6	6.8	17.6	34
期待値 II	7.4	5.2	13.4	26
合計	17	12	31	60

自由度 df (degree of freedom) は，以下のように計算される。

df = (縦セル数 - 1) × (横セル数 - 1)
= 1 × 2
=2

自由度の説明は通常，標本数 k から拘束条件数を引いたもの，とされるが，必要セル数として考えてみると理解しやすい。この場合，最低限，縦も横も 2 セル必要である。そうでないと，そもそも比率を比較できないからである。1 セルでは駄目，2 セル以上必要ということが，自由度の式で，(縦横のセル- 1) となって現れている。

実際に，表 1 と 2 の観察値と期待値，および自由度 2 を用いて，カイ二乗検定を行うと次のようになる。

$\chi^2(2) = 8.20$
$p = 0.017$

したがって 3 群（3 標本）間で比率が有意に異なることが分かる。

3. 残差分析の計算

以上のカイ二乗検定の結果では，どの群の観察値に有意差があるかは不明である。それを明らかにする目的で行われるのが残差分析である。
まず，残差を前述のように求める。すなわち

残差 = 観察値 − 期待値

であり，各セルは以下の表 3 になる。

表 3. 群 A, B, C における I, II の残差

	A	B	C
残差 I	-2.63	-2.8	5.4
残差 II	2.63	2.8	-5.4

次に，残差を以下のように標準化（standardize）する。

$$標準化残差 = \frac{残差}{\sqrt{期待値}}$$

分母にある，期待値の平方根は，残差の標準偏差，つまり標準誤差（standard error）である。この標準化残差（standardized residual） は，近似的に，平均 0，分散 1 の標準正規分布に従う。それゆえ，この標準化残差は，標準正規分布における Z スコアと見なせる。各セルの標準化残差を次の表 4 に示す。

表 4. 群 A, B, C における I, II の標準化残差

	A	B	C
標準化残差 I	-0.85	-1.07	1.30
標準化残差 II	0.97	1.23	-1.48

この標準化残差を用いて，検定（*p* 値の算出）を行う方法も考えられる。しかし，注意して欲しいのは，表 3 の残差が I と II で絶対値が等しいのに，標準化残差ではそれが違う点である。この点を補正するために，次のような残差分散と呼ばれる値を求める。

$$残差分散 = \left(1 - \frac{縦の周辺和}{総数}\right)\left(1 - \frac{横の周辺和}{総数}\right)$$

例えば， AI の残差分散は次のようになる。

$$\mathrm{AI}\ 残差分散 = \left(1 - \frac{17}{60}\right)\left(1 - \frac{34}{60}\right)$$

各セルの残差分散を次の表 5 に示す。

表 5. 群 A, B, C における I, II の残差分散

	A	B	C
残差分散 I	0.311	0.347	0.209
残差分散 II	0.406	0.453	0.274

この残差分散と，前述の期待値をかけたものの平方根を，改めて，標準誤差と定義し直し，標準化残差を計算し直したものを，調整済み標準化残差（adjusted standardized residual）と言う。

$$\text{調整済み標準化残差} = \frac{\text{残差}}{\sqrt{\text{期待値} \times \text{残差分散}}}$$

場合によっては，これを標準化残差と呼ぶので注意が必要である。各セルの調整済み標準化残差を次の表 6 に示す。

表 6. 群 A, B, C における I, II の調整済み標準化残差

	A	B	C
調整済み標準化残差 I	-1.522	-1.824	2.833
調整済み標準化残差 II	1.522	1.824	-2.833

単純な残差と同じく，各群の I と II で絶対値が等しくなっていることが分かる。Haberman (1973) が示したこの調整済み標準化残差のほうが，標準正規分布に近くなる。

この値を標準正規分布の Z スコアとして，それに相当するパーセント点を求めれば，最終的な残差分析の結果となる。EXCEL 関数を利用する場合は，次のように入力すれば，*p* 値を求めることができる。

= 2*(1-NORMSDIST(ABS(各調整済み標準化残差)))

ここで，ABS は絶対値にする関数である。

各群の *p* 値を次の表 7 に示す。

表 7. 群 A, B, C の残差分析 *p* 値

	A	B	C
p 値	0.128	0.068	0.005

これによって，C 群の比率が有意に異なっていることが分かる。

4. 残差分析の多重検定

残差分析の結果として得られた *p* 値を多重比較するなら，有効数字を表 7 より多くとって，例えば，Benjamini & Hochberg 法（BH 法，Benjamini & Hochberg, 1995）を使って，以下のように計算される。

A: 0.12789 / (3/3)
B: 0.06820 / (2/3)
C: 0.00462 / (1/3)

この結果を表 8 にまとめた。

表 8. 群 A, B, C の残差分析 *p* 値の多重比較（Benjamini & Hochberg 法）

	A	B	C
補正 *p* 値	0.128	0.102	0.014

ただし，残差分析においては，必ずしも多重比較を考える必要はない。通常，多重比較と言えば，群間の比較，すなわち，A-B，A-C，B-C の比較を言うのが，残差分析の多重比較では，各群において実測値と期待値を比較している。したがって，例えば，最初から最も残差が大きい C 群だけに注目するならば，表 7 の *p* 値を使えば良いのである。

以上の検定を手っ取り早くオンラインソフトで計算するならば，js-STAR を使えば良い（田中，2021）。この中のカイ二乗検定 i × j 表（注 2）を利用すれば，多重比較の結果も含めて出力される。これには，統計解析ソフト R のプログラムも出力される。

5. 残差分析を使った論文

冒頭でも述べた，この論説を引用している山下（2015）は，「逆ギレ」，「イケメン」，「婚活」などの新語の使われ方について，年齢別，男女別の分析に残差分析を用いている。

篠田・山野（2015）は，残差分析（Table 7）によって，福島県産食品の購入を避けたい，という意識に，有意な男女差が認められ，女性のほうが，その傾向が強いことを明らかにした。

山下・坂田（2008）は，大学生の失恋からの立ち直り過程を研究し，同性友人からのサポートを受ける学生は，「傷つき」，「未練」，「断念」の経験度が高く，立ち直りの評価が低いことを，残差分析で明らかにした（Table 9）。ここでは，*p* 値ではなく，調整済み残差が示されている。さらに Haberman 論文で引用されているのは，Haberman (1974) である。

注

1. カイ二乗検定（独立性検定）から残差分析へ：全体から項目別への検定．生物科学研

究所（長野県岡谷市）ウェブサイト

https://biolab.sakura.ne.jp/chi-square-residual-analysis.html 2024 年 11 月 4 日確認

2. js-STAR_XR+ release 2.1.3 j カイ二乗検定 ｉ × Ｊ表

https://www.kisnet.or.jp/nappa/software/star/freq/chisq_ixj.htm 2024 年 11 月 4 日確認

参考文献

Benjamini, Y. & Hochberg, Y. (1995) Controlling the false discovery rate: a practical and powerful approach to multiple testing. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 57(1): 289-300.

Haberman, S. J. (1973) The Analysis of Residuals in Cross-Classified Tables. Biometrics, 29: 205-220.

Haberman, S. J. (1974) The analysis of frequency data. University of Chicago Press.

篠田佳彦・山野直樹（2015）敦賀市における放射線とリスクに関する意識調査．日本原子力学会和文論文誌 14(2), 95-112.

田中敏（2021） R を使った< 全自動> 統計データ分析ガイド: フリーソフト js-STAR_XR の手引き．北大路書房.

山下倫実・坂田桐子（2008）大学生におけるソーシャル・サポートと恋愛関係崩壊からの立ち直りとの関連．教育心理学研究，56: 57-71.